Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A III A

SUBIECTUL I

În 5 pungi și 3 cutii sunt 59 de creioane. Dacă o pungă are cu 7 creioane mai mult decât o cutie, aflați câte creioane sunt în 5 pungi și 5 cutii

N. Ivășchescu, Gazeta Matematică

SUBIECTUL II

a) În grădina lui Făt-Frumos numărul florilor se dublează ziua, iar noaptea se usucă 3 flori. În dimineața zilei de 15 iulie erau în grădină 6 flori. Câte flori vor fi în grădină în data de 20 iulie, seara?

Prof. Felicia Dobrinescu, Drăgășani

b) Maria a cumpărat 10 cutii cu creioane, iar Doru a cumpărat 6 cutii de același fel. Știind că Maria are cu 36 de creioane mai multe decât Doru, să se afle câte creioane mai are Maria, dacă a dat la 3 prietene câte 4 creioane.

Prof. Felicia Dobrinescu, Drăgășani

SUBIECTUL III

Să se găsească toate numerele de forma $\overline{abc}$ scrise cu cifre impare, știind că diferența dintre suma primelor două cifre și suma ultimelor două cifre este 2.

Prof. Felicia Dobrinescu, Drăgășani

SUBIECTUL IV

Un număr de trei cifre se numește *produsiv* dacă una din cifrele sale este egală cu produsul celorlalte două cifre.

a) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr *produsiv*.

b) Dacă B este suma numerelor *produsive* care au suma cifrelor 9, aflați câtul și restul împărțirii succesorului lui B la 9.

c) Câte numere *produsive* există? (Justificați răspunsul!)

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A IV A

SUBIECTUL I

Un număr este cu 100 mai mare decât altul. Numărul mai mic împărțit la un al treilea număr dă câtul 9 și restul 45. Aflați cele trei numere știind că suma lor este 1995.

N. Ivășchescu, Gazeta Matematică

SUBIECTUL II

O păpușă, un robot și un joc costă în total 70 lei. Păpușa e mai ieftină cu 5 lei decât robotul, iar robotul și păpușa costă cu 8 lei mai mult decât jocul. Câți lei costă fiecare jucărie?

Prof. Felicia Dobrinescu, Drăgășani

SUBIECTUL III

Un număr de trei cifre se numește *sumativ*, dacă cifra sutelor este egală cu suma celorlalte două cifre.

a) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr *sumativ.*

b) Arătați că suma celor mai mici cinci numere *sumative* este un număr *sumativ.*

c) Câte numere *sumative* există? (Justificați răspunsul!)

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

SUBIECTUL IV

Considerăm numărul n=123...9101112...201120122013 (s-au alipit toate numerele naturale de la 1 la 2013).

a) Calculați suma primelor 30 de cifre ale lui n.

b) Ce cifră se află pe poziția 2013?

c) Din numărul n, tăiați 6342 cifre, astfel încât să rămână cel mai mare număr posibil. Care este acel număr?

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A V A

SUBIECTUL I

Determinați cifrele nenule x,y,z, știind că $x<y<z$ și

$\overline{x,(yz)}+\overline{y,(zx)}+\overline{z,(xy)}=x+y+z+1$

Anca Mihiș, Gazeta Matematică

SUBIECTUL II

Un număr natural se numește *primitivist,* dacă atât suma cifrelor sale, cât și produsul cifrelor sale, sunt numere prime (de exemplu numărul 115 este *primitivist*).

a) Calculați suma numerelor *primitiviste* de 2 cifre;

b) Scrieți toate numerele *primitiviste* de 3 cifre;

c) Câte numere *primitiviste* de 2013 cifre există?

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

SUBIECTUL III

Considerăm șirul de numere naturale: 3;6;11;18;27;38;.....

a) Scrieți următorii 2 termeni ai șirului;

b) Stabiliți dacă 2013 aparține sau nu șirului;

c) Calculați suma primilor 2013 termeni ai șirului.

Prof. Valerian Cotoi, Drăgășani

SUBIECTUL IV

Fie $A=\{\overline{abcd}/\ a+c=b+d\}$

a) Arătați că $2013\in A$

b) Arătați că suma elementelor oricărei submulțimi nevide a lui A, este divizibilă cu 11.

c) Câte elemente ale lui A sunt divizibile cu 99? (Justificați!)

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A VI A

SUBIECTUL I

Arătați că fracția: $\frac{10n+9}{15n+1}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL II

Un număr natural se numește *anulabil*, dacă produsul cifrelor sale este zero.

a) Arătați că 2013 este *anulabil*;

b) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr *anulabil* de 4 cifre;

c) Care este probabilitatea, ca alegând un număr de 4 cifre, acesta să fie *anulabil*?

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

SUBIECTUL III

Fie A={x= $\frac{a+b}{2013}$ / x este subunitară, a și b numere naturale}

a) Calculați suma celor mai mici 6 elemente ale lui A.

b) Determinați perechile de numere prime a și b pentru care $\frac{a+b}{2013}=\frac{1}{c}$ cu c∈**N**

c) Câte fracții ireductibile are A?

Prof. Valerian Cotoi, Drăgășani

SUBIECTUL IV

În interiorul unghiului drept <XOY, considerăm semidreptele (OM și (ON astfel încât m(<XON)=m(<YOM)=60^0. Fie A∈(OM și B∈(ON, astfel încât OA=OB. Notăm cu Q, respectiv P, picioarele perpendicularelor din A pe OX, respectiv din B pe OY.

a) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului OAB;

b) Arătați că AQ=BP;

c) Demonstrați că AB//QP.

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A VII A

SUBIECTUL I

a) Scrieți numărul 100 ca suma a patru cuburi perfecte

b) Arătați că numerele de forma 10^{n^3-n+2} se pot scrie ca suma a patru cuburi perfecte, pentru orice n, număr natural mai mare ca 1.

C. Dragomir, Gazeta Matematică

SUBIECTUL II

Fie A=$\{\overline{abcd}$/ a+b+c+d=6$\}$

a) Arătați că 2013∈A

b) Dacă B=$\{\sqrt{x}/x \in A\}$, calculați B∩**Q;**

c) Dacă C=$\{$x∈A/ x≤2013$\}$, iar n=cardC, determinați n și stabiliți dacă $\sqrt{n+2} \in$**Q**

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

SUBIECTUL III

a) Arătați că $12^3+16^2+29=2013$

b) Arătați că ecuația $a^3+b^2+c=2013$, are cel puțin 45 soluții în $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$;

c) Rezolvați în $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ ecuația: $x^4+y^2+z^0=2013$.

Prof. Valerian Cotoi, Drăgășani

SUBIECTUL IV

Notăm cu M,N,P mijloacele laturilor (AB), (AC), respectiv (BC), ale triunghiului ABC.

a) Arătați că $\Delta MNP \sim \Delta$CBA

b) Dacă ST//AB, S∈(NC), T∈BC, arătați că $\Delta STC \sim \Delta$NPC

c) Notăm cu Q și R intersecțiile dreptei BS cu MP, respectiv NP. Știind că PQ×PM=PR×PN, arătați că $PN^2=PM\times MQ$ și $BP^2=BQ\times BR$

Prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA AVIII A

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Rezultatul calculului 2013-2013:671 este egal cu ……

5p 2. Dacă A={3,4,5} şi B={2,3,4} atunci A∩B=...

5p 3. După o reducere de 10%, un obiect costă 72 lei. Preţul iniţial al obiectului este …..lei.

5p 4. Un triunghi echilateral are perimetrul de 12 cm. Aria triunghiului e egală cu ...cm^2.

5p 5. Diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3,4,12 cm, are ... cm.

5p 6. Diagrama din ***figura 1*** reprezintă numărul de săli de sport în funcţie de numărul de locuri. Numărul total de locuri la cele 13 săli de sport este egal cu ……

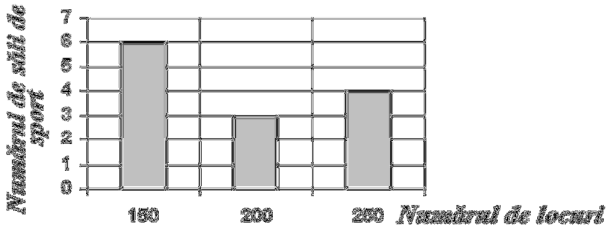


Figura 1

SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

5p 1. Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf *S* şi bază *ABCD*.

5p 2. Arătaţi că numărul $x=(3+2\sqrt{5})^2-6\sqrt{20}$ este număr natural.

5p 3 Suma a 2 numere naturale este 2013. Aflaţi cele două numere, ştiind că dacă împărţim unul din ele la celălalt, obţinem câtul 3 şi restul 13

4. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to R$, $f(x)=x+3$

5p a) Reprezentaţi grafic funcţia;

5p b) Calculaţi: $f(0,21)+f(0,22)+f(0,23)+...+f(0,75)$

5p 5. Simplificaţi fracţia: $\frac{x^2+9x+20}{x^2-25}$

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din ***figura 2*** reprezintă rezervorul de combustibil al unui autotractor de mare putere. Dimensiunile rezervorului sunt: AB = 100 cm, BC = 50 cm şi CC' = 60 cm. Instalaţia de alimentare este prevăzută cu un sorb care este la 5 cm deasupra fundului rezervorului.

5p a) Consumul mediu al autotractorului este de 25 litri de combustibil la 100 de km parcurşi. Dacă rezervorul este plin, aflaţi câţi kilometri poate parcurge în total fără nici o altă alimentare

5p b) Rezervorul este confecţionat din tablă din oţel inoxidabil. Dacă 1 m^2 de tablă din oţel inoxidabil are masa egală cu 8 kg, aflaţi masa rezervorului fără combustibil (orificiile se neglijează).

5p c) Orificiul de alimentare al rezervorului se află la intersecţia diagonalelor $A'C'$ şi $B'D'$ iar dimensiunea lui este neglijabilă. Prin acest orificiu se introduce o vergea de

SUCCES!

grosime neglijabilă (vezi poziţia în figură!). Aflaţi lungimea minimă în centimetri a vergelei, exprimată printr-un număr natural, astfel încât aceasta să nu cadă pe fundul rezervorului.

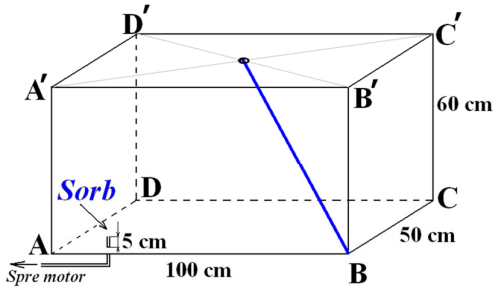


Figura 2

2) O grădină are forma unui trapez dreptunghic, cu baza mare AB=80m. baza mică CD=50m şi înălţimea AD=40m.

5p a) Calculaţi suprafaţa grădinii (în hectare)

5p b) Câţi metri de plasă din sârmă sunt necesari pentru împrejmuirea grădinii?

5p c) Verificaţi prin calcul dacă diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

SUBIECTUL IV (20 puncte)

Se consideră pătratul ABCD, iar M un punct situat în interiorul sau pe laturile pătratului.

a) Demonstraţi că $|MA \cdot MC - MB \cdot MD| \leq AB^2$;

b) Determinaţi toate punctele M pentru care inegalitatea de mai sus devine egalitate.

(R. Marinescu, Gazeta Matematică)

Subiecte selectate de prof. Ion Marcel Neferu si prof. Valerian Cotoi.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A IX-A (4 ore)

1. Fie un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât:
$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}$, pentru orice $n \geq 1$. .
Arătați că $a_n < 3$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

***

2. În patrulaterul convex ABCD se iau punctele M∈(BC), N∈(CD) astfel încât $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{ND}$. Dreptele AM şi BN se intersectează în punctul P. Se cere:
a) să se exprime vectorii $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$.;
b) dacă patrulaterul ABCD este paralelogram, să se calculeze $\frac{AP}{PM}, \frac{BP}{PN}$..

3. a) Aratati ca $\{t\} + \{-t\} = 0 <=> t \in \boldsymbol{Z}$.
b) Rezolvati in **R** ecuatia $\left\{\frac{1-3x}{x+2}\right\} + \left\{\frac{2x-3}{x+2}\right\} = 0$. Cate radacini intregi are ecuatia?

4. Se consideră un triunghi *ABC* . Folosind notaţiile uzuale, arătaţi că IG *II* BC dacă şi numai dacă *AB* + *AC* = 2*BC*.

Subiectele au fost selectate de prof. Dinu Maria, Dinu Daniel si Chitu Florin

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A X-A (4 ore)

1. Fie $z_1,\ z_2, z_3\ \in \boldsymbol{C}^*$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ si
$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$.
Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{z_1}{z_2+z_3}$.

2. a) Demonstrati ca $\frac{pq}{p+q} \leq \frac{p+q}{4}, \forall\, p, q \in (0, \infty)$.
b) Fie numerele $a, b, c \in (0,1)$ si $x, y, z \in (0. \infty)$. astfel incat
$$a = (bc)^x,\ b = (ac)^y,\ c = (ab)^z$$
Aratati ca $\frac{1}{x+y+2} + \frac{1}{y+z+2} + \frac{1}{z+x+2} \leq 1$.

G.M., nr. 7-8-9/2011

3. a) Sa se arate ca functia $f: R \to R, f(x) = 2^x + 3^x$ este injectiva.
b) Sa se rezolve, în multimea numerele reale, ecuatia:
$$\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1).$$
Prof. Dinu Gigi-Daniel, L. T. Bratianu

4. a). Să se demonstreze inegaliatatea: $\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{a+b}{2}$, unde $a, b > 0$,
b).Să se rezolve ecuaţia:
$$\sqrt{4^x - 6^x + 9^x} + \sqrt{9^x - 3^x + 1} + \sqrt{4^x - 2^x + 1} = 2^x + 3^x + 1$$

Subiectele au fost selectate de prof. Dinu Maria, Dinu Daniel si Chitu Florin

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A XI-A M1

1. Fie şirul: $a_0=a_1=1$, $a_{n+1}(na_n \cdot a_{n-1}+2a_{n-1}-a_n)=a_n \cdot a_{n-1}$; $(\forall)$ $n\geq 1$
Se cere:

a) să se calculeze $a_{18;}$

b) să se demonstreze că: $\frac{n+2}{a_n}-\frac{n-1}{a_{n+1}}=3$, pentru $(\forall)$ $n\geq 1$;

c) arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(C)$ astfel incat $A^3 = O_3$. Sa se arate ca matricea $B=\begin{pmatrix} 1-a & b \\ c & 1-d \end{pmatrix}$ este inversabila.

3. Se dă şirul $a_n = arctg\frac{3}{9\cdot n^2-3\cdot n-1}$ unde $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Prof. Dragoş Constantinescu, Liceul Tehnologic G-ral Magheru

4. Fie A si B doua matrice patratice de ordinul doi cu elemente numere complexe, cu proprietatea $AB-BA=A$. Sa se arate ca $AB^nA=O_2$, $\forall\, n \in N^*$.

G.M.nr.11, 2012

Subiectele au fost selectate de prof. Dinu Maria, Dinu Daniel si Chitu Florin

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

CLASA A XII-A M1

1) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si multimea

$$G = \left\{ X(a) \in M_2(R) / X(a) = I_2 + aA, a > -\frac{1}{2} \right\}$$

a) Aratati ca G este parte stabila A lui $M_2(R)$ in raport cu inmultirea;
b) Aratati ca $(G,\cdot)$ este grup abelian;
c) Demonstrati ca $f: G \to R, f\big(X(a)\big) = \ln(2a+1)$ este izomorfism de la grupul $(G,\cdot)$ la grupul $(R,+)$ si calculati

$$X\left(\frac{1}{2}\right) \cdot X\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \cdots \cdot X\left(\frac{2n-1}{2}\right), n \in N^*.$$

2) Fie funcţia $f: R \to R$ şi F o primitivă a sa cu proprietatea că

$$e^{x-F(x)} = F(x), \ \forall x \in R.$$

Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(Gazeta Matematică , nr.2/2012)

3) Fie functia $f: R \to R, f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

i) Calculati aria suprafetei marginite de graficul lui f, axa *Ox* si dreptele $x=0$, $x=1$.
ii) Calculati $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$.
iii) Calculati limita sirului de termen general $a_n = n\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)dx$.

4) Fie polinomul $f = (X^2+X+1)^{2013} + (X^2-X+1)^{2013} \in R[X]$ si $f = a_{4026}X^{4026} + a_{4025}X^{4025} + \cdots + a_1X + a_0$ forma sa algebrica.

a) Determinati restul impartirii lui f la X^2-1.
b) Calculati $a_0 + a_2 + \cdots + a_{4026}$.
c) Determinati a_{2013}.

Prof. Dinu Gigi-Daniel, L. T. Bratianu

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

Clasa a IX-a (2-3 ore)

1. Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x) = 2x^2 - mx + 3$.
a) Determinaţi valorile naturale ale lui m ştiind că vârful parabolei asociate graficului funcţiei f are coordonatele egale.
b) Determinaţi valorile intregi ale lui m, ştiind că vârful parabolei asociate graficului funcţiei f este in cadranul I..

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

2. Fie ecuatia $x^2 - (2n^2 + 3n - 3)x - 6n^2 - 9n = 0, \forall n \in N^*$.
a) Pentru n=2, rezolvati ecuatia.
b) Fie S_n radacina pozitiva ecuatiei date. Stiind ca S_n este suma primilor n termeni ai unui sir $(a_n)_{n\geq 1}$ stabiliti daca acest sir are termenii in progresie aritmetica.

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

3. Rezolvati ecuatiile:
a) $\left[\frac{5x+3}{7}\right] = 3x + 1$.
b) $3|x - 2| + 2|x + 5| = 18$.
c) $\{2x + 6\} = x + 3, x \in Z$.

Prof. Dinu Gigi-Daniel, L. T. Bratianu

4. Fie triunghiul ABC, mediana AD, D∈ (BC) şi punctele E∈ (AB), F∈ (AC) astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{3}, \frac{FC}{FA} = \frac{1}{4}$. Dreapta EF intersectează mediana AD în G şi dreapta BC în M.
a) Să se calculeze $\frac{AG}{GD}$.
b) Să se demonstreze că $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

Clasa a X-a (2-3 ore)

1. a) Să se determine numarul real a, ştiind că numerele 2^a, 4^a+1, 2^{a+2} sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice
b) Determinati n natural, stiind ca raportul dintre termenul al saptelea al dezvoltarii $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ si termenul al saptelea de la sfarsitul ei este egal cu 0,1(6).

2. **a**) Sa se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
b) Aratati ca daca ε este solutie a ecuatiei $x^2+x+1=0$, atunci, pentru orice $a,b,c\in R$ are loc inegalitatea:

$$(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)\geq 0.$$

3. Calculati suma:

$$S=\frac{1}{lg2\cdot lg4}+\frac{1}{lg4\cdot lg8}+\cdots+\frac{1}{lg2^n\cdot lg2^{n+1}}-\frac{n}{n+1}(\log_2 10)^2, unde\ n\in N^*$$

4. Rezolvati in ***R*** ecuatiile:

a) $3\log_{100x}100=4\log_{10x}10.$
b) $\sqrt[3]{3x+1}=1+x.$

Subiectele au fost selectate de prof.: Dinu Maria, Dinu Gigi Daniel si Chitu Florin

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

Clasa a XI-a M2

1) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(m,m)$, $B(1,m-2)$ şi $C(-4,2m+1)$, unde $m \in R$.

a) Pentru $m=2$ determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

b) Să se arate că pentru orice $m \in R$ punctele A, B, C sunt vârfurile unui triunghi.

c) Să se arate că $A_{\Delta ABC} \geq 3$.

2) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+1}{x^2+1}$, $a, b \in R$.

a) Să se determine $a, b \in R$ pentru care funcţia f admite asimptota oblică $y=2x-1$.

b) Să se determine $a, b \in R$ pentru care funcţia f admite punctul de extrem $x_1=1$ şi $f(1)=0$.

c) Pentru $a=0, b=-1$ să se arate că $0 \leq f(x) \leq -2, \forall x \in [-1,0]$.

3) Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=A+A^3+A^5+...+A^{2013}$.

a) Să se calculeze $(A+I_3)^{-1}$.

b) Să se calculeze A^n, $n \in N^*$.

c) Să se determine suma elementelor matricei B.

4) Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-e^x}{x+e^x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in [0,\infty)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(0,-1)$.

c) Să se demonstreze că $-1 \leq f(x) \leq \dfrac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Subiectele au fost propuse de prof. Barzescu Catalin, C. T. Energetic

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

SUCCES!

Concursul Interjudetean Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XIX-a, 20 aprilie 2013

Clasa a XII-a M2

1. Fie functia f: $R \to R, f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.
a) Calculati $\int_0^1 f(x)dx$.
b) Calculati volumul corpului obtinut prin rotirea graficului functiei $g:[1;2] \to R$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ in jurul axei OX.
c) Aratati ca $\int_0^1 x^{2013} f(x)dx \geq \frac{2\sqrt{2}}{4031}$.

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

2. Fie $f:(0,\infty) \to R, f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0,\infty)$.
a) Arătaţi că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $[1,\infty)$.
b) Determinaţi primitiva F a lui f cu proprietatea că F(1)=2.
c) Calculaţi aria suprafeţei marginite de graficul lui f, axa OX şi dreptele $x = \frac{1}{2}$ si $x = 1$.

3. Se considera pe ***R*** legea de compozitie $*$ definita astfel:
$x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in R$.
a) Sa se arate ca $*$ este asociativa.
b) Sa se rezolve ecuatia:
$x * x * x * x = x, x \in R$.
c) Sa se calculeze:
$\frac{2013}{2012} * \frac{2012}{2011} * \frac{2011}{2010} * \cdots * \frac{4}{3} * \frac{3}{2} * \frac{2}{1} * 2 * 3 * 4 * \cdots * 2013$

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

4. Fie polinoamele $f = (X+1)^{2013} + (X-1)^{2013} \in R[X], g = X^2 - 1 \in R[X]$. Polinomul $f = a_{2013}X^{2013} + a_{2012}X^{2012} + \cdots + a_1X + a_0$ este forma algebrica a lui *f*.
a) Determinati restul impartirii lui f la g.
b) Determinati a_0 si calculati $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2012}$.
c) Rezolvati in R ecuatia:
$g^2(x+2) - 2013g(x+2) + 2012 = 0$.

Prof. Dinu Maria-C.N. Gib Mihaescu

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.

SUCCES!